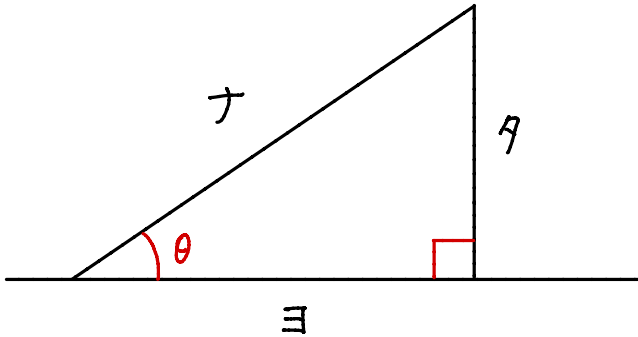


本質理解の強さ!

三角比・単位円特講

三角比は、直角三角形から生まれた。でも直角三角形には限界があるから単位円で考えるようになった。

三角比は、直角三角形から生まれました。



$$\sin \theta = \frac{\text{タ}}{\text{ナ}}$$

$$\cos \theta = \frac{\text{ヨ}}{\text{ナ}}$$

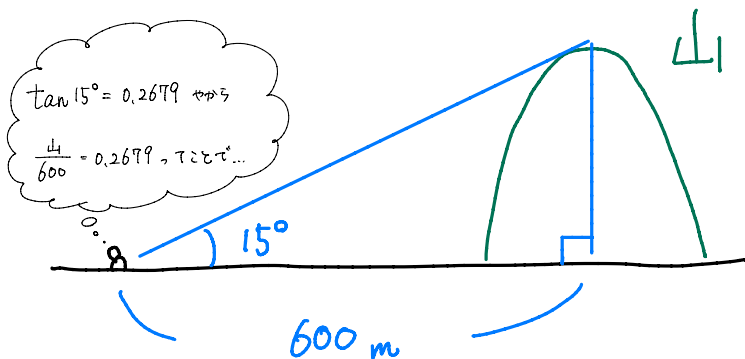
$$\tan \theta = \frac{\text{タ}}{\text{ヨ}}$$

昔の人は、
ヒマすぎて0°~90°までsin,cos,tan全部計算してた。

三角関数表

角	正弦 (sin)	余弦 (cos)	正接 (tan)	角	正弦 (sin)	余弦 (cos)	正接 (tan)
0	0.0000	1.0000	0.0000	45	0.7071	0.7071	1.0000
1	0.0175	0.9998	0.0175	46	0.7193	0.6947	1.0355
2	0.0349	0.9994	0.0349	47	0.7314	0.6820	1.0724
3	0.0523	0.9986	0.0524	48	0.7431	0.6691	1.1106
4	0.0698	0.9976	0.0699	49	0.7547	0.6561	1.1504
5	0.0872	0.9962	0.0875	50	0.7660	0.6428	1.1918
6	0.1045	0.9945	0.1051	51	0.7771	0.6293	1.2349
7	0.1219	0.9925	0.1228	52	0.7880	0.6157	1.2799
8	0.1392	0.9903	0.1405	53	0.7986	0.6018	1.3270
9	0.1564	0.9877	0.1584	54	0.8090	0.5878	1.3764
10	0.1736	0.9848	0.1763	55	0.8192	0.5736	1.4281
11	0.1908	0.9816	0.1944	56	0.8290	0.5592	1.4826
12	0.2079	0.9781	0.2126	57	0.8387	0.5446	1.5399
13	0.2250	0.9744	0.2309	58	0.8480	0.5299	1.6003
14	0.2419	0.9703	0.2493	59	0.8572	0.5150	1.6643
15	0.2588	0.9659	0.2679	60	0.8660	0.5000	1.7321
16	0.2756	0.9613	0.2867	61	0.8746	0.4848	1.8040
17	0.2924	0.9563	0.3057	62	0.8829	0.4695	1.8807
18	0.3090	0.9511	0.3249	63	0.8910	0.4540	1.9626
19	0.3256	0.9455	0.3443	64	0.8988	0.4384	2.0503
20	0.3420	0.9397	0.3640	65	0.9063	0.4226	2.1445
21	0.3584	0.9336	0.3839	66	0.9135	0.4067	2.2460
22	0.3746	0.9272	0.4040	67	0.9205	0.3907	2.3559
23	0.3907	0.9205	0.4245	68	0.9272	0.3746	2.4751
24	0.4067	0.9135	0.4452	69	0.9336	0.3584	2.6051
25	0.4226	0.9063	0.4663	70	0.9397	0.3420	2.7475
26	0.4384	0.8988	0.4877	71	0.9455	0.3256	2.9042
27	0.4540	0.8910	0.5095	72	0.9511	0.3090	3.0777
28	0.4695	0.8829	0.5317	73	0.9563	0.2924	3.2709
29	0.4848	0.8746	0.5543	74	0.9613	0.2756	3.4874
30	0.5000	0.8660	0.5774	75	0.9659	0.2588	3.7321
31	0.5150	0.8572	0.6009	76	0.9703	0.2419	4.0108
32	0.5299	0.8480	0.6249	77	0.9744	0.2250	4.3315
33	0.5446	0.8387	0.6494	78	0.9781	0.2079	4.7046
34	0.5592	0.8290	0.6745	79	0.9816	0.1908	5.1446
35	0.5736	0.8192	0.7002	80	0.9848	0.1736	5.6713
36	0.5878	0.8090	0.7265	81	0.9877	0.1564	6.3138
37	0.6018	0.7986	0.7536	82	0.9903	0.1392	7.1154
38	0.6157	0.7880	0.7813	83	0.9925	0.1219	8.1443
39	0.6293	0.7771	0.8098	84	0.9945	0.1045	9.5144
40	0.6428	0.7660	0.8391	85	0.9962	0.0872	11.4301
41	0.6561	0.7547	0.8693	86	0.9976	0.0698	14.3007
42	0.6691	0.7431	0.9004	87	0.9986	0.0523	19.0811
43	0.6820	0.7314	0.9325	88	0.9994	0.0349	28.6363
44	0.6947	0.7193	0.9657	89	0.9998	0.0175	57.2900
45	0.7071	0.7071	1.0000	90	1.0000	0.0000	-- --

ドローンもGPSもなかった昔の人の、
距離を測るための工夫です。

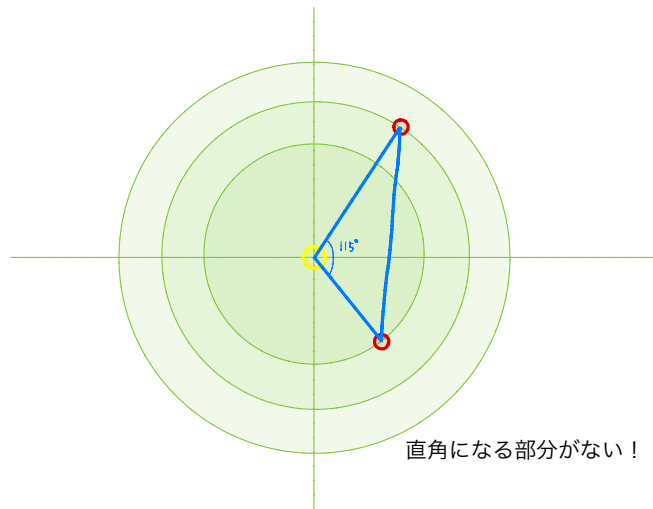


当時はめっちゃ便利でした。
でも、これは限界がありました。

それは、90°より大きい角度のsin,cos,tanを
考えることができない点です。

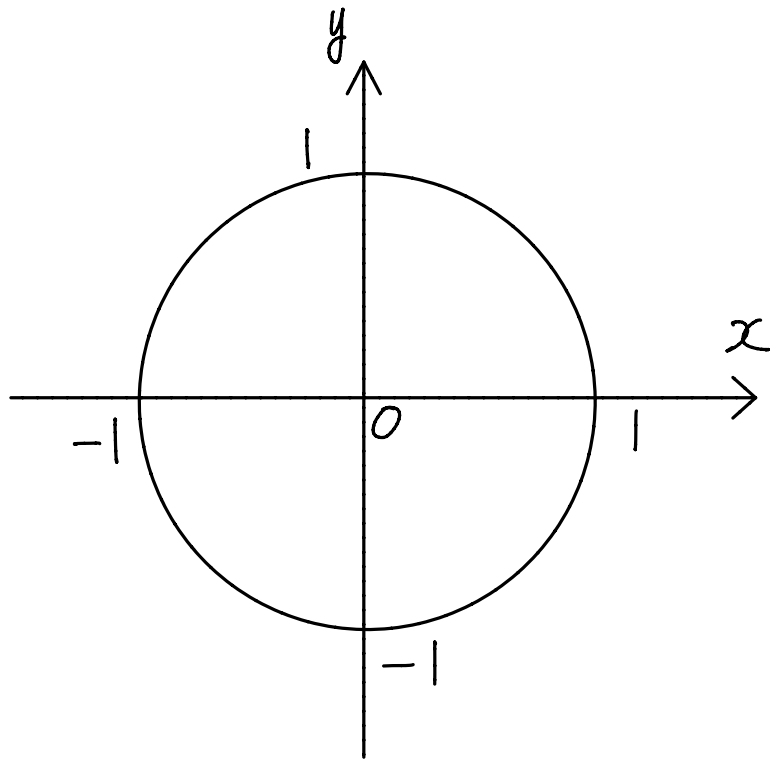
なぜなら、三角形の内角の和は180°だから、90°
より大きい角を持つ直角三角形がかけないんで
す。

そんなの世の中にたくさんあるのに！



そこで、
せっかくの「ヒマ人のあのすごい努力」を、
90°より大きい角でもきちんと使えるように
数学者が、知恵を絞りました。

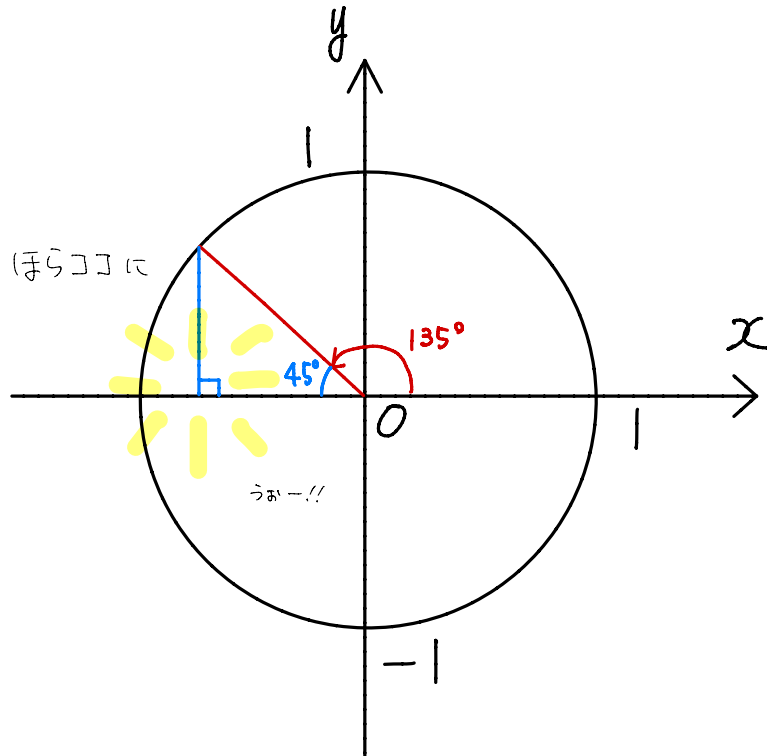
それで生まれたのが、単位円の発想です。
単位円は、こんな「半径1の円」のこと。



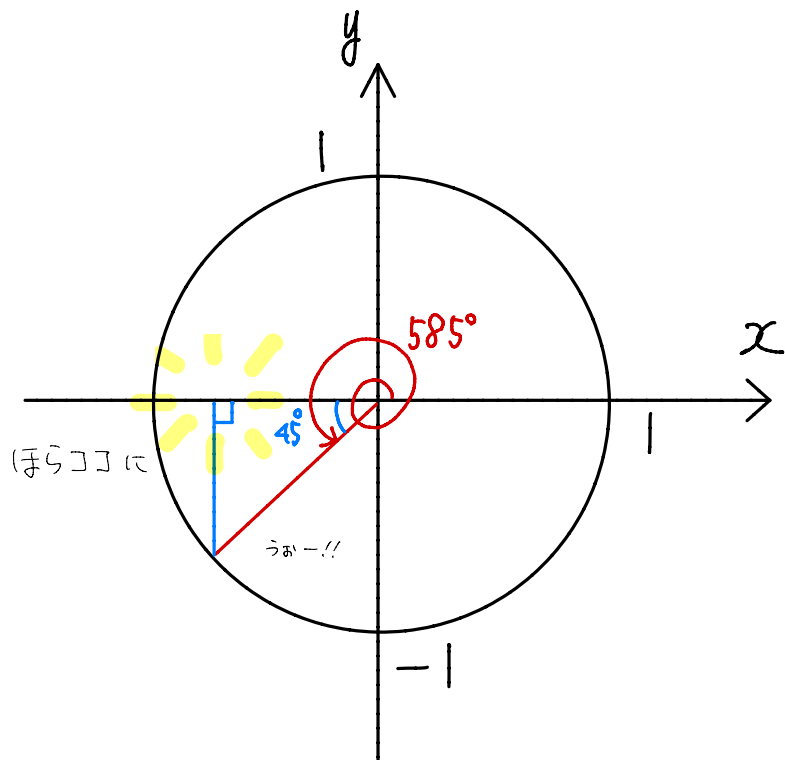
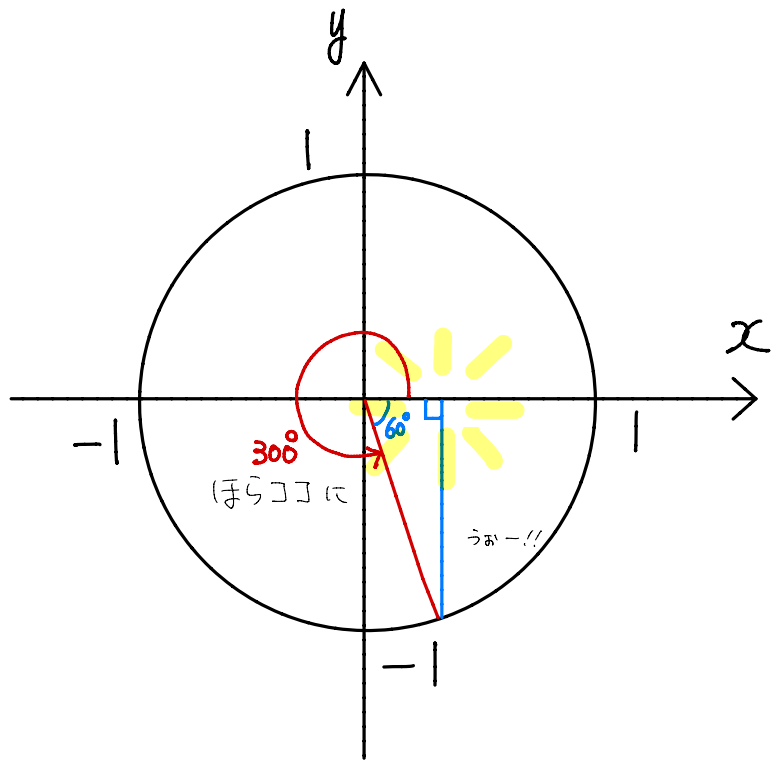
知恵を絞って気づいた数学者はこう言いました。

「90°より大きい角も、

単位円で考えれば、直角三角形つくれるやん？」



「何なら180°より大きくてもできるし、360°より大きくてもできるで」



こんな風に、
単位円を使えば 90° より大きい角度でも、
それに対応した 90° 未満の直角三角形を作ることが
できます。

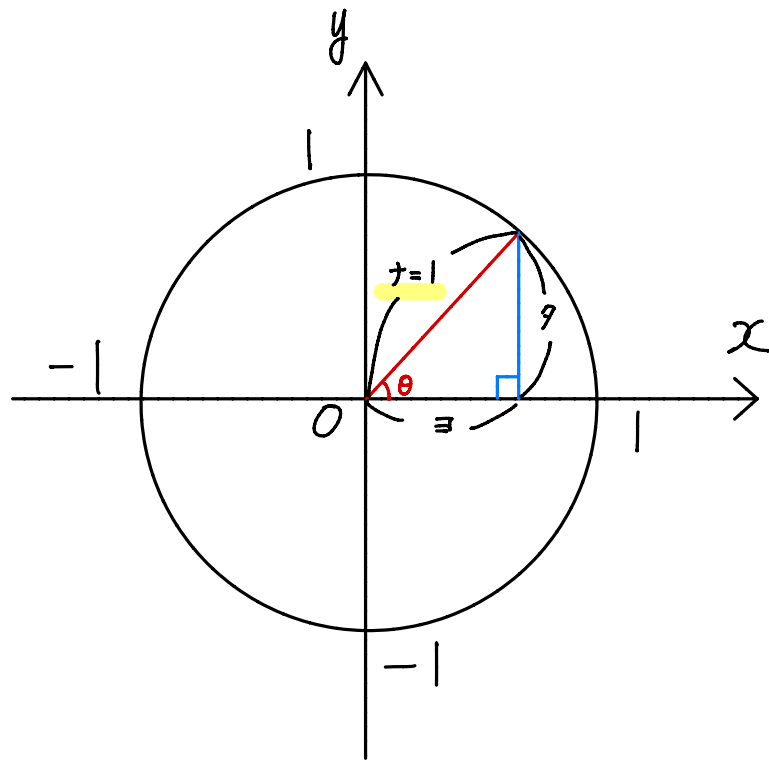
実際にできてましたね。青い直角三角形が。

こんな風に $0^\circ \sim 90^\circ$ に落とし込みさえすれば、
「ヒマ人のあのすごい努力」が使えます。

やった！

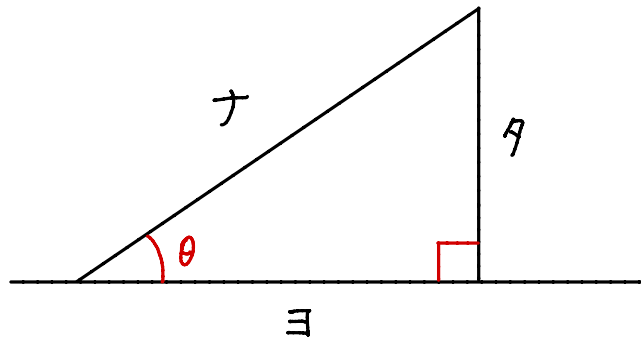
でも、これだけじゃない。
数学者がスゴかったのは、半径を1にしたところ
です。

半径が1ということは、右の図のように
 θ がどんな角度だろうと「ナナメ」は1になる
ということです。



ナナメが1だと何が嬉しいのか？

これを思い出してください。
はじめに出した三角比です。



$$\sin \theta = \frac{4}{5}$$

$$\cos \theta = \frac{3}{5}$$

$$\tan \theta = \frac{4}{3}$$

ナナメが1ということは、
 $\sin$ の計算も、 $\cos$ の計算も、分母が1になります。

つまり

$$\sin \theta = 4, \quad \cos \theta = 3$$

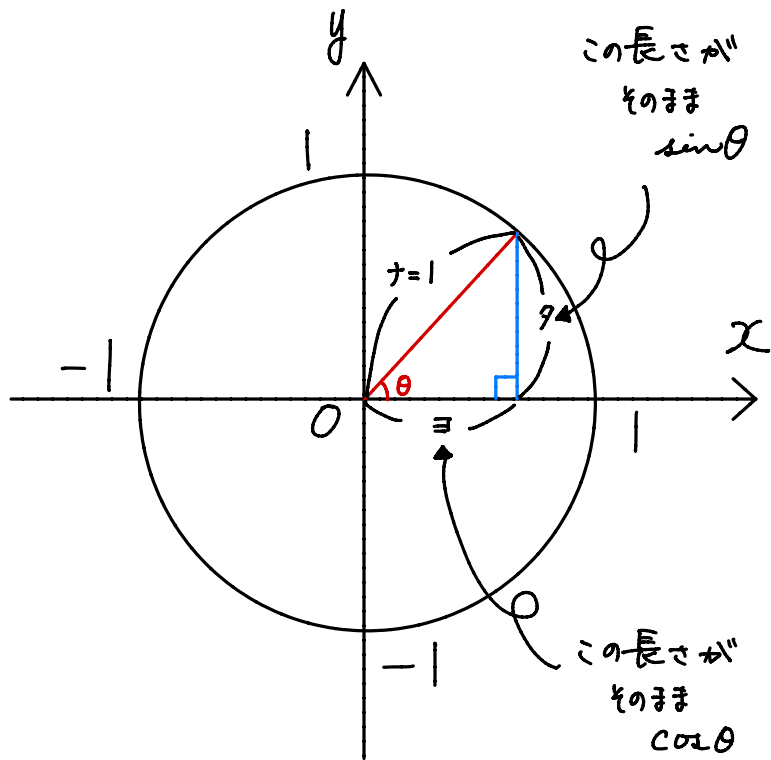
となるわけです。

つまり、

単位円なら、余計な計算をしなくても、
できた直角三角形のタテの長さがそのまま $\sin \theta$
できた直角三角形のヨコの長さがそのまま $\cos \theta$
だと一瞬で(一目で)わかる

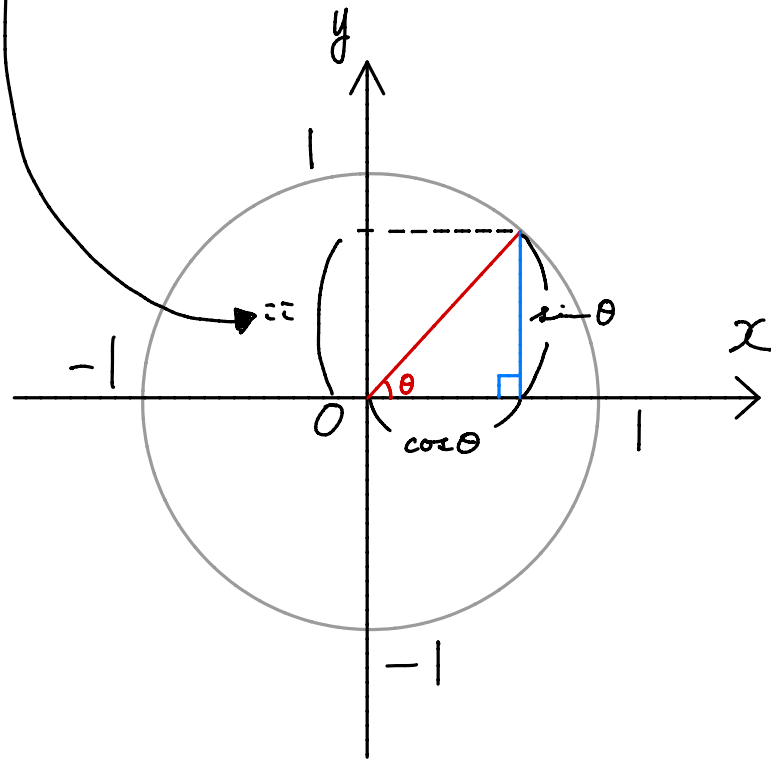
ってことです。

もういちど単位円を見てみましょう。

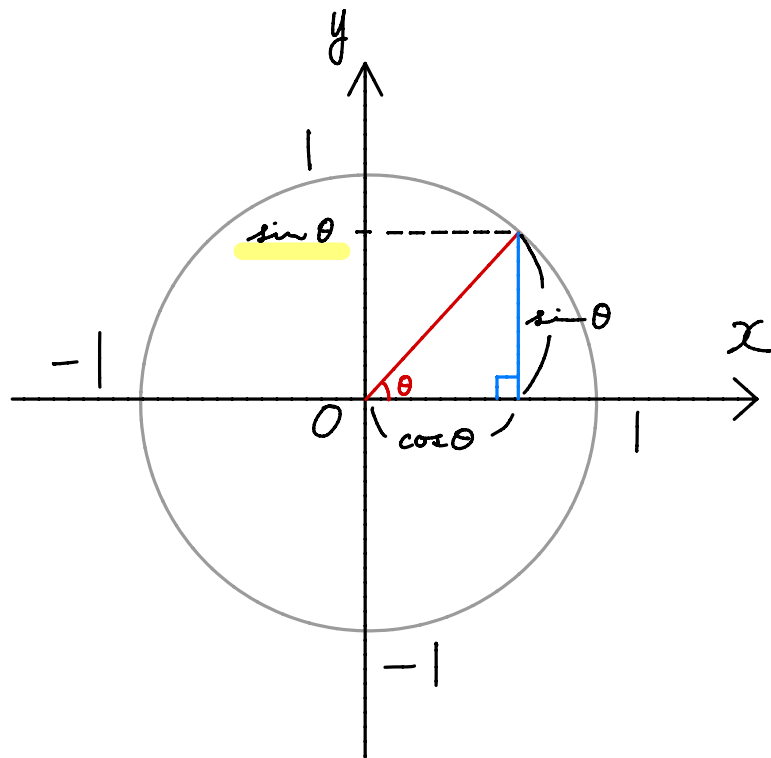


ってことです。

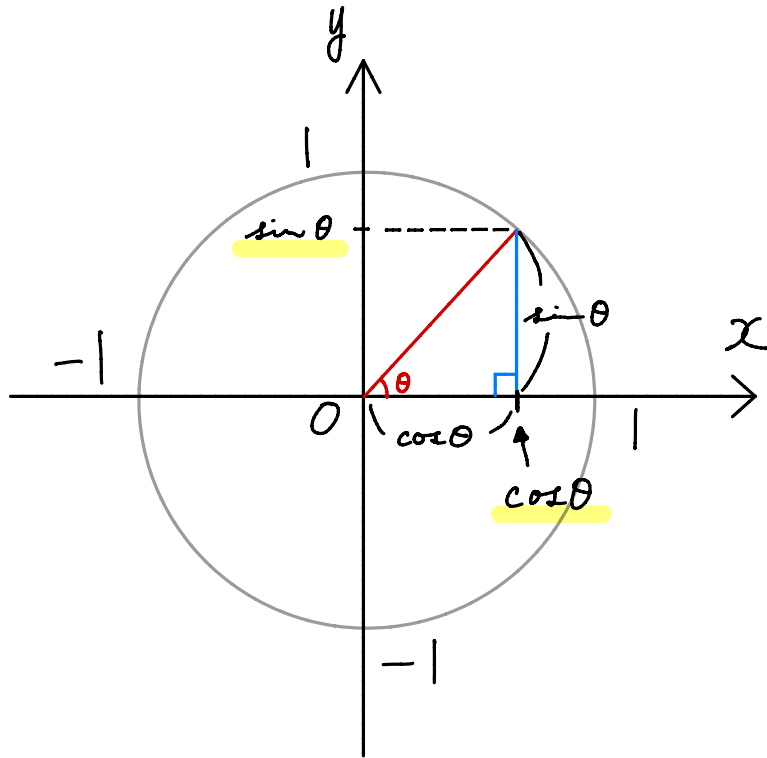
で、このタテの長さって、
ここの長さと等しいですね。



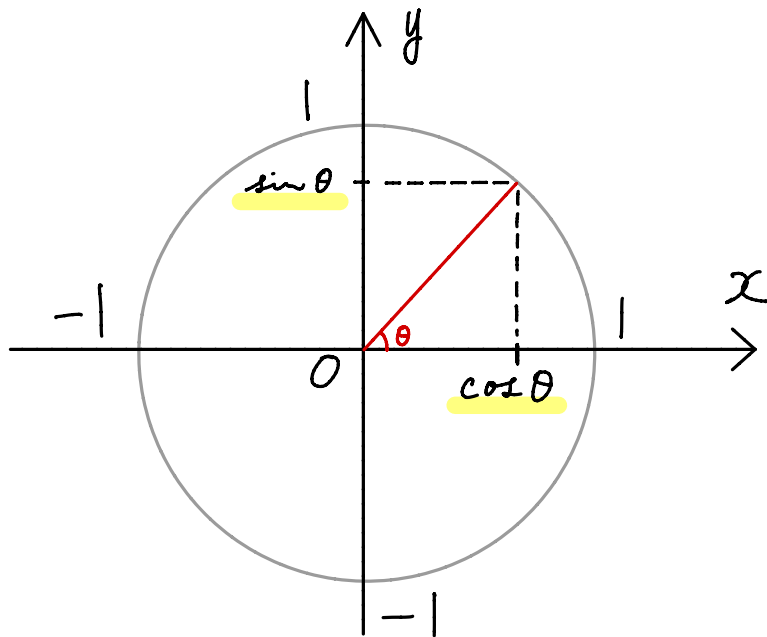
だから、こう書けるわけです。



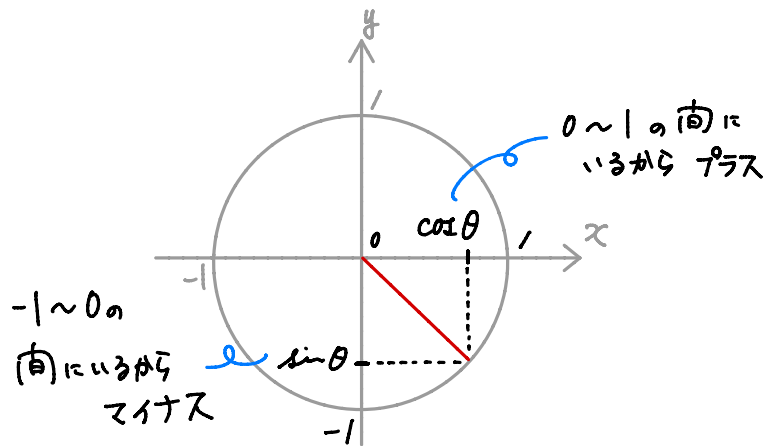
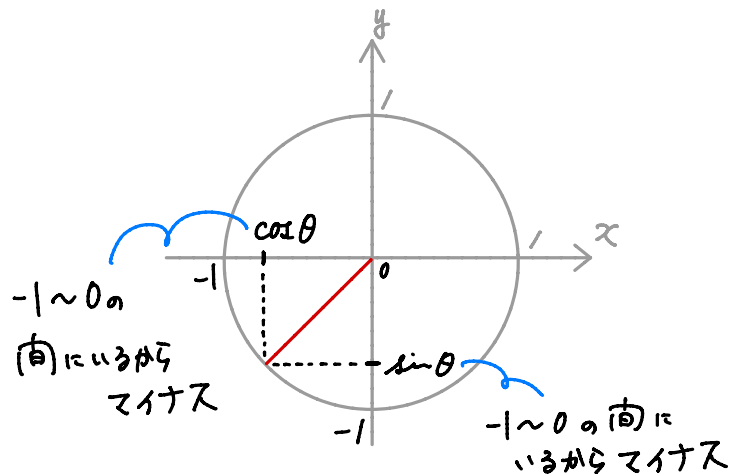
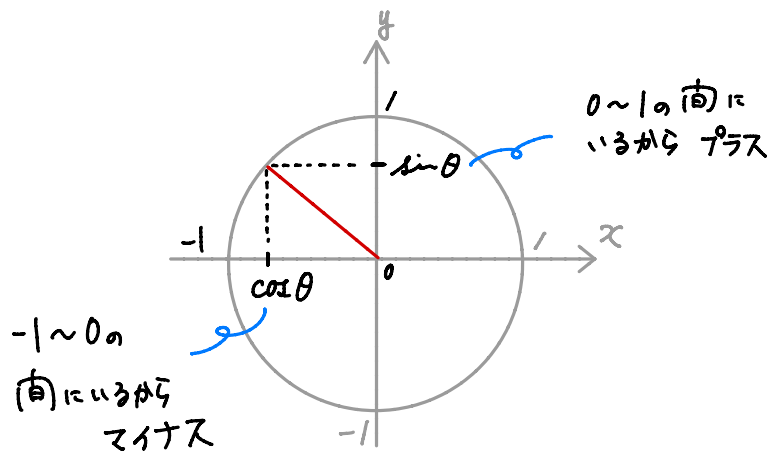
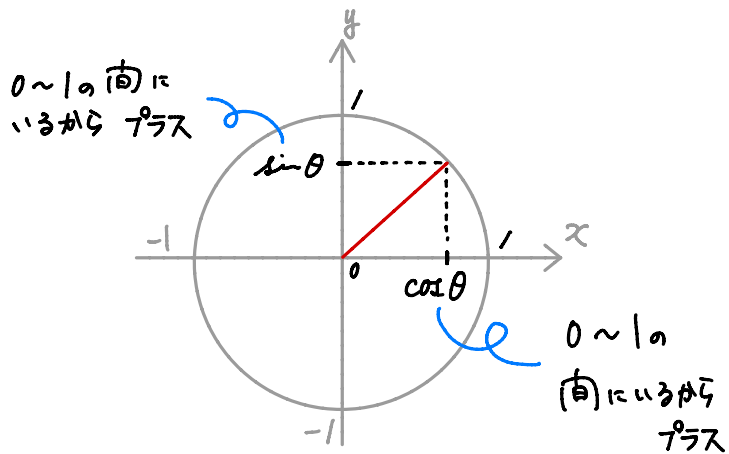
$\cos \theta$ も同じ。これは解説不要ですね。



つまり、**角度のライン**と単位円とがぶつかる点、
そのy座標(タテ)が $\sin\theta$ で、そのx座標(ヨコ)が $\cos\theta$ になるってことです。



だから、角度によっては $\sin\theta$ がマイナスになったり、 $\cos\theta$ がマイナスになったりします。
それは、こんな風に単位円で見れば一発でわかります。まさに一目瞭然。



この数学者の単位円を使うアイディアは、
どんな角度でも使えるし、
いろいろ一目でわかって便利なので、

「これからの時代は、
これを三角比の定義にしよう！」

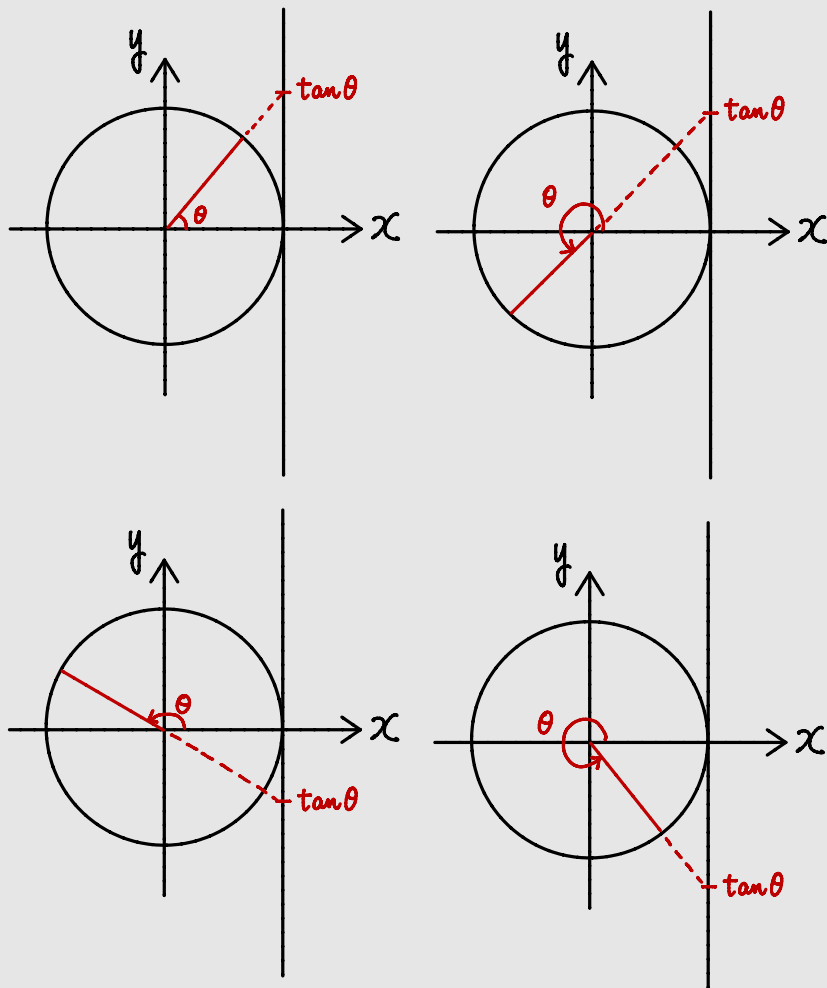
となったのです。

ちなみに

「 $\tan\theta$ はどこで表すの？」

というと、

角度の線と $x=1$ とがぶつかるところが
 $\tan\theta$ になります。



練習問題1

θ が以下の角度のときの、 $\sin\theta$ 、 $\cos\theta$ を単位円を用いて求めよ。

※次のエリアの話の布石なので(とくに(5)と(6))、
今解いておくと次の話が理解しやすくなるはず。
むしろ先を読む必要がなくなるかも。

(1) 0°

(2) 90°

(3) 180°

(4) 270°

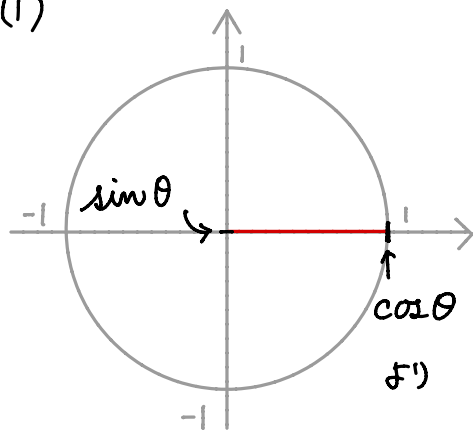
—

(5) 30°

(6) 150°

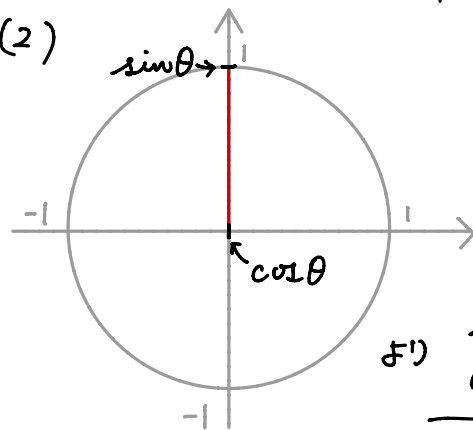
練習問題1の答え

(1)



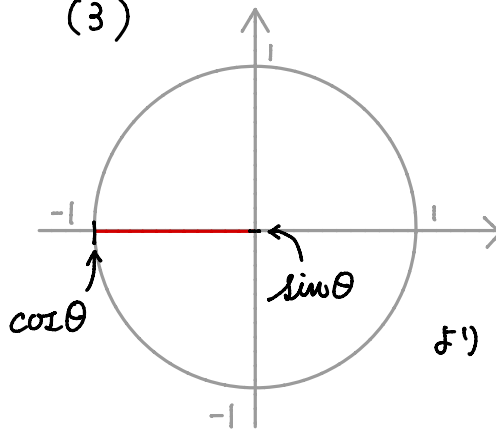
$$\begin{aligned} \sin \theta &= 0 \\ \cos \theta &= 1 \end{aligned}$$

(2)



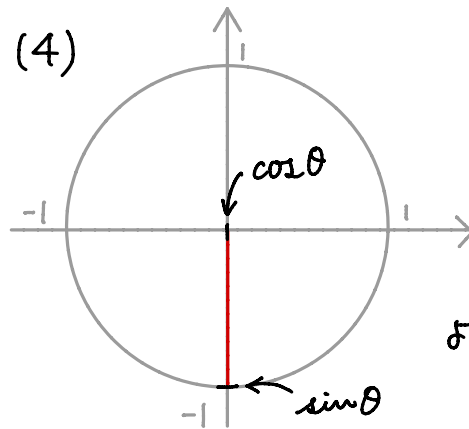
$$\begin{aligned} \sin \theta &= 1 \\ \cos \theta &= 0 \end{aligned}$$

(3)



$$\begin{aligned} \sin \theta &= 0 \\ \cos \theta &= -1 \end{aligned}$$

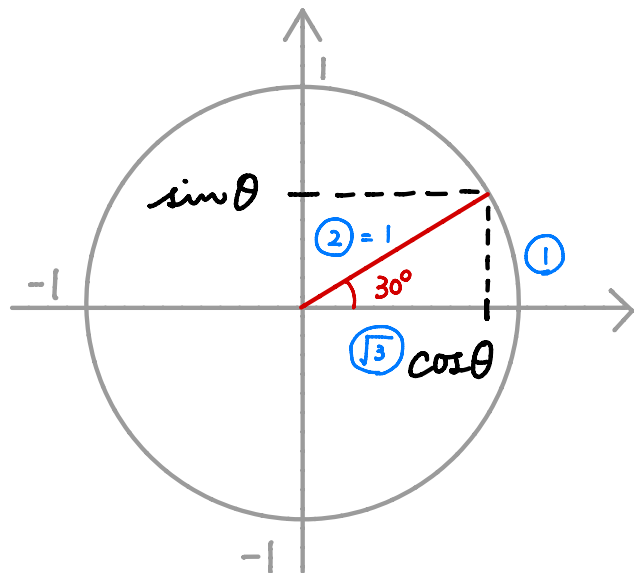
(4)



$$\begin{aligned} \sin \theta &= -1 \\ \cos \theta &= 0 \end{aligned}$$

練習問題1の答え (続き)

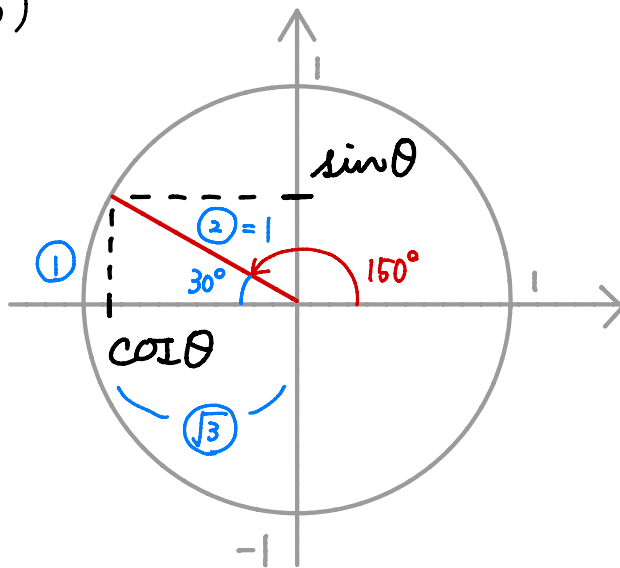
(5)



$\begin{aligned} &\textcircled{2} = 1 \quad \text{72と1は} \\ &\times 2 \downarrow \\ &\textcircled{1} = \frac{1}{2} \\ &\times \sqrt{3} \downarrow \\ &\textcircled{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$

$$\begin{aligned} \therefore \sin \theta &= \frac{1}{2} \\ \cos \theta &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

(6)



$$\begin{aligned} \therefore \sin \theta &= \frac{1}{2} \\ \cos \theta &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$\sin(180^\circ - \theta)$ とか $\cos(90^\circ + \theta)$ とかの話

ここまでがわかれば、あとは大したことない。

公式っぽいやつかくけど、覚える必要なし。
というか、こんなん作ろうと思えばいくらでも作れる。

$$\begin{aligned}\cos(90^\circ - \theta) &= \sin \theta \quad \text{とか} \\ \sin(270^\circ + \theta) &= -\cos \theta \quad \text{とか} \\ \cos(540^\circ - \theta) &= -\cos \theta \quad \text{とか}\end{aligned}$$

何が言いたいかって、
こんなもん暗記することに価値はないってこと。

全部単位円から導出できる。

単位円で

$\theta \pm \bullet^\circ$ 系のやつを考えるときのポイントは、

1. 同じ形を見つける
2. 同じ長さをを見つける
3. 符号を考える

の3点。

それさえ抑えておけば、これから先の話はバッチリわかる。

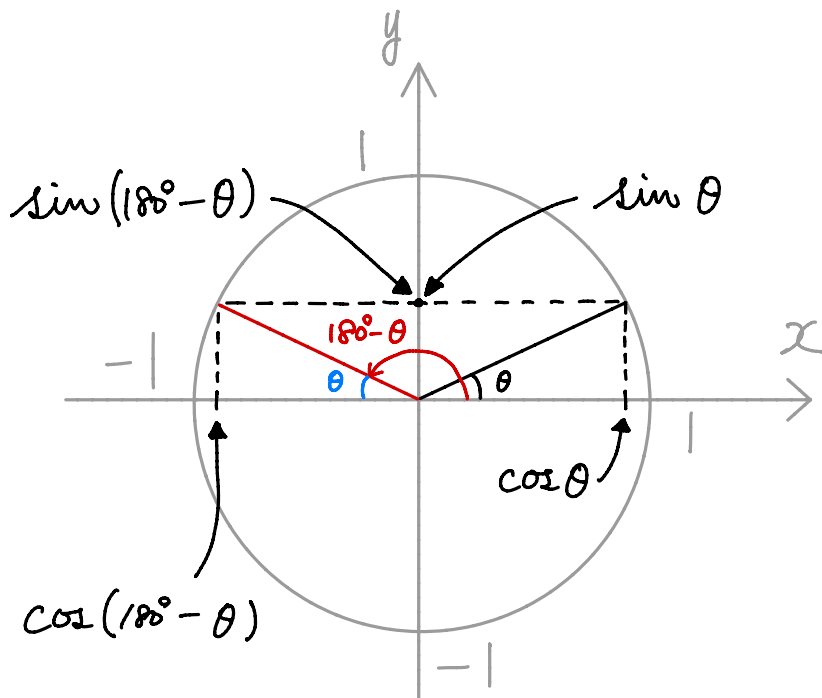
ほないきましょう。

180°-θ の計算

練習問題1の(5)(6)を解いてもらったらわかったと思うけど、

180°-θがつくる直角三角形は

θがつくる直角三角形と形が全く同じで、反対側にある(y軸対象)三角形になる。



sinについて

$$\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta$$

が成り立つのは明らかやな。

cosについて

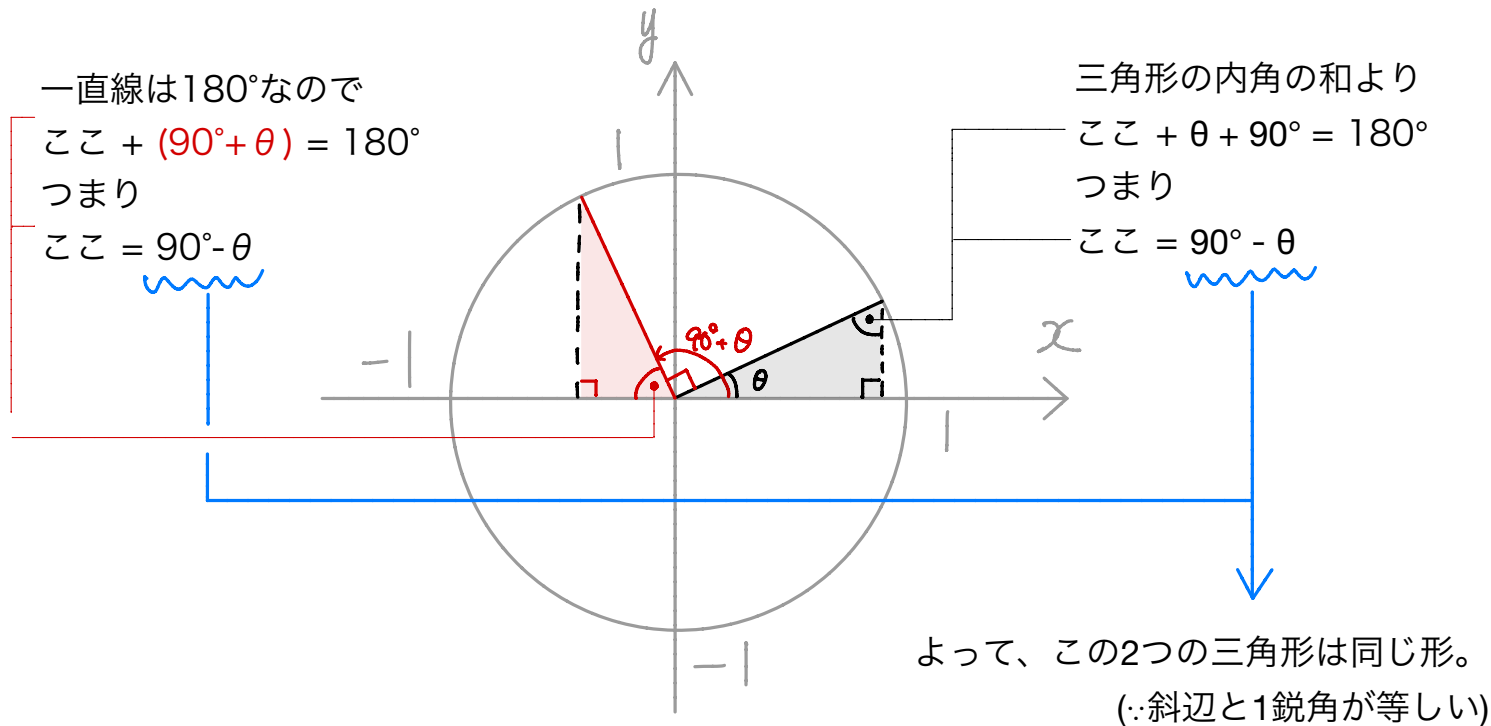
cos(180°-θ)とcosθは、
長さが同じで符号が反対やから、

$$\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta$$

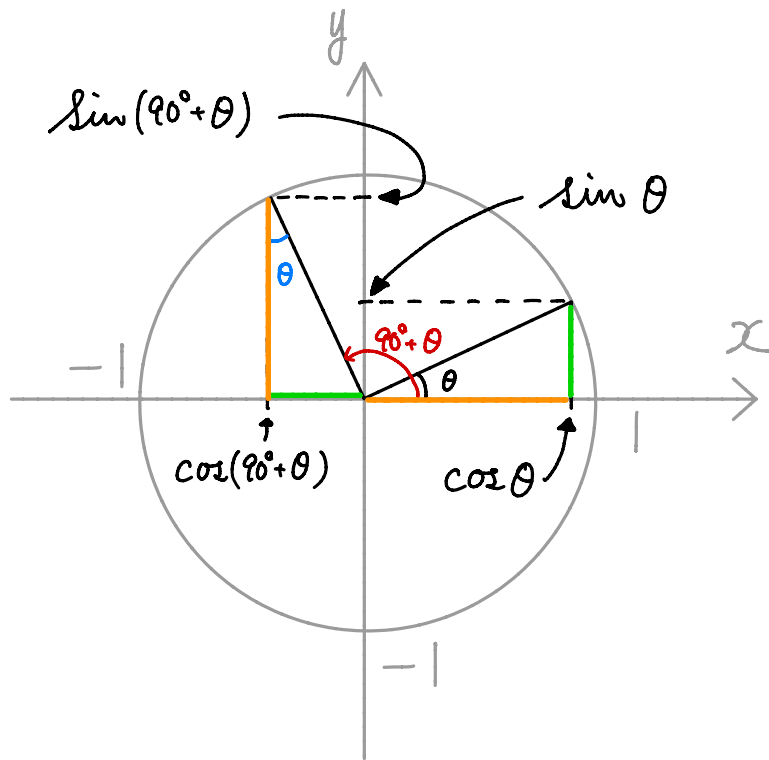
とわかる。

$90^\circ + \theta$ の計算

$90^\circ + \theta$ がつくる直角三角形について、まずわかって欲しいのは、
 θ がつくる三角形と**形自体は全く同じ**ってこと。



理屈がわからなくても、「形が全く同じ」ってことは叩き込んで欲しい。
形が全く同じってことは、**オレンジ**、**緑**で分けした通り、それぞれの長さが一致する。
それを利用するのが $90^\circ + \theta$ の計算。



sinについて

オレンジの長さは等しいから

$$\sin(90^\circ + \theta) = \cos \theta$$

が成り立つ。

cosについて

緑の長さは等しいから

$\cos(90^\circ + \theta)$ と $\sin \theta$ は同じ長さ。

ただし、 $\cos(90^\circ + \theta)$ はマイナスで、 $\sin \theta$ はプラスの位置にある。

符号を考慮して

$$\cos(90^\circ + \theta) = -\sin \theta$$

とわかる。

こんな風に、

● $\pm\theta$ の三角比を、 θ の三角比に落とし込む
(公式を導く)ことができる。

文字にすると長いし、

図もいろいろ書き込んであって気持ち悪い
かもしれへん。

でも一度理解できれば、

自分のための計算なら、5秒で出来る。

万が一忘れても、

いつでも、自分の力で、復活できる。

ここでは扱ってない $\tan\theta$ やって、導ける。

これが本質を理解する強みやな。

これを「公式や！」と思って覚えてる人に
ありがちなんやけど、公式を使うことが大
事なんではないから気をつけよう。

「 $180^\circ-\theta$ 使ったのにそのあとどうしたら良
いかわからん！」というのは、まさにそ
れ。

公式を使うことが問題を解くことやと思っ
てると、そうなる。

「バラバラな角を θ に統一することで計算
する」ことが、問題を解くことやで。

そこ、気をつけてな。

統一できるなら、**何度に統一してもエエ。**

模範解答と完全に一致しなくても大丈夫。

ほな最後に問題解いて終わろう。

練習問題2

以下の値を求めよ。

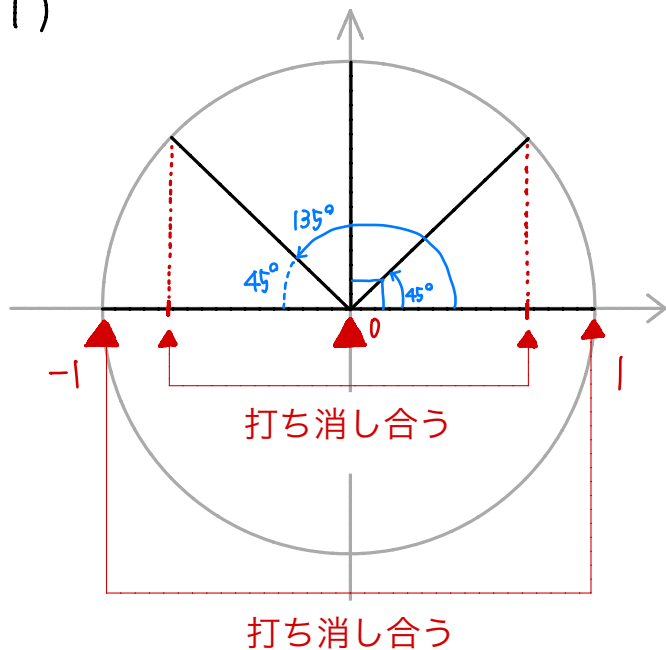
$$(1) \cos 0^\circ + \cos 45^\circ + \cos 90^\circ + \cos 135^\circ + \cos 180^\circ$$

$$(2) \sin 0^\circ + \sin 45^\circ + \sin 90^\circ + \sin 135^\circ + \sin 180^\circ$$

$$(3) (\sin 10^\circ + \cos 100^\circ)^2$$

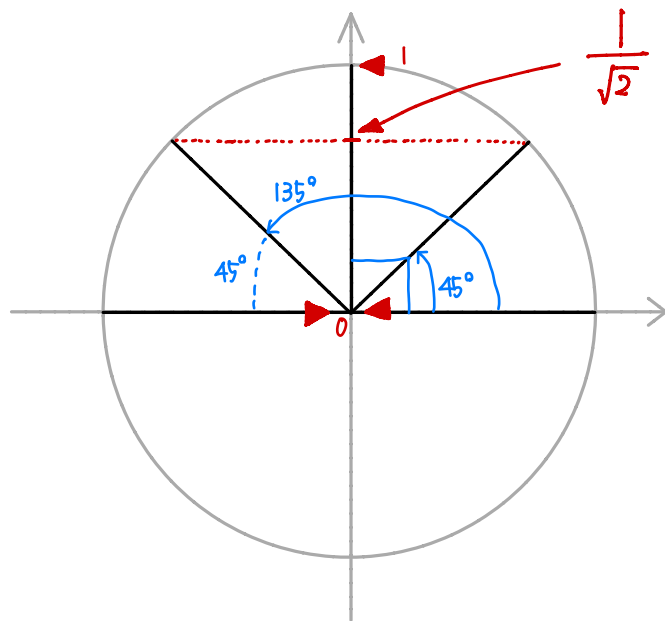
練習問題2の答え

(1)



$$\therefore 0$$

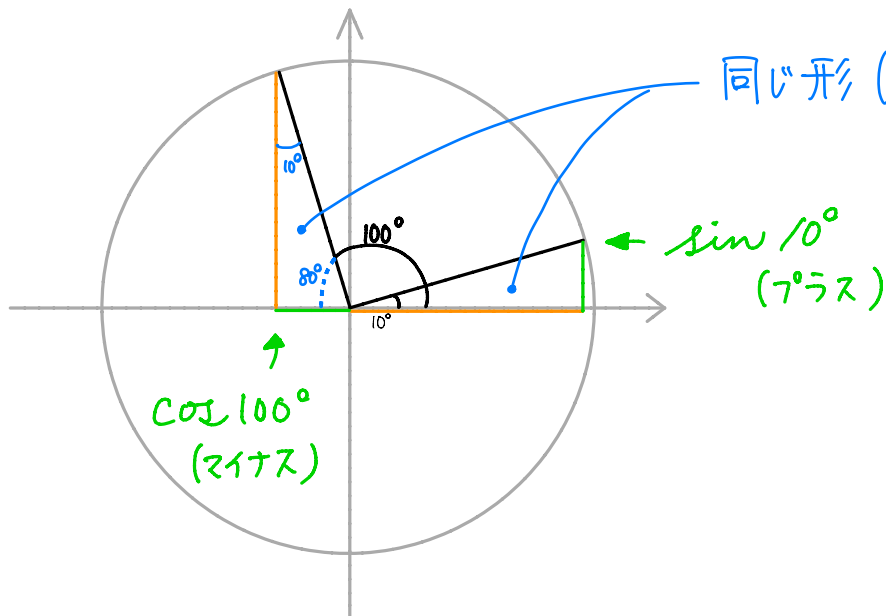
(2)



$$\begin{aligned} \therefore 0 + \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + 0 &= 1 + \frac{2}{\sqrt{2}} \\ &= 1 + \sqrt{2} \end{aligned}$$

練習問題2の答え(続き)

(3)



同じ 長さ
同じ 長さ

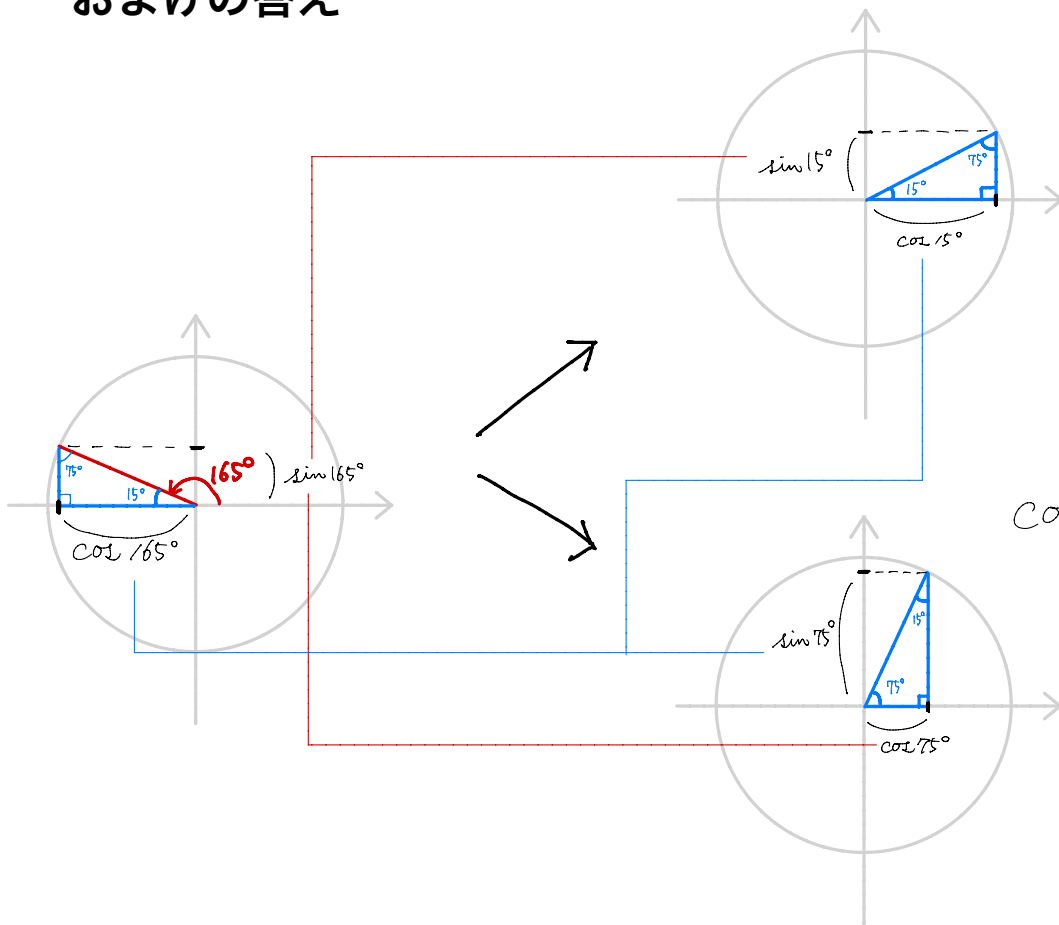


$$\begin{aligned} & (\sin 10^\circ + \cos 100^\circ)^2 \\ &= \{ \sin 10^\circ + (-\sin 10^\circ) \}^2 \\ &= (\sin 10^\circ - \sin 10^\circ)^2 \\ &= 0^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

おまけ

$\sin 165^\circ$, $\cos 165^\circ$ を鋭角(90° 未満の角)で表すとどうなる？
(2通りあるから、2つとも書いてみよう。)

おまけの答え



$$\sin 165^\circ = \sin 15^\circ = \cos 75^\circ$$

全て同じ長さを表してるから.

$$\cos 165^\circ = -\cos 15^\circ = -\sin 75^\circ$$

全て同じ長さを表してるが
符号だけは違う.